Geometriekalküle

Rechnen mit projektiver Geometrie

Michael Schmid

Berufliche Oberschule Rosenheim

3. März 2016

1 Axiomatische Grundlagen (Wdh.)

2 Standardmodelle affiner und projektiver Geometrie

3 Rechnen mit homogenen Koordinaten

4 Projektive Transformationen

5 Anwendungen

Axiome der projektiven Geometrie (Wdh.)

Definition (Projektive Ebene)

Eine *projektive Ebene* ist eine Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, dreier Mengen $\mathcal{P}$ (der *Punkte*), $\mathcal{G}$ (der *Geraden*) und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ (der *Inzidenzen*).

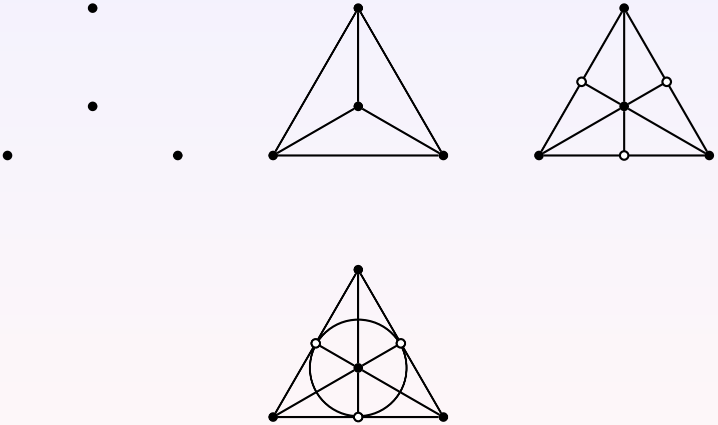
Man sagt $p \in \mathcal{P}$ *liegt auf* $g \in \mathcal{G}$ (oder umgekehrt g *geht durch* p), genau dann, falls $(p, g) \in \mathcal{I}$ ist. Hierbei gilt:

(i) Für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ existiert genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, welche durch p und q geht.

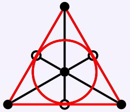
(ii) Für zwei verschiedene $g, h \in \mathcal{G}$ existiert genau ein Punkt $p \in \mathcal{P}$, welcher auf g und h liegt.

(iii) Es existieren vier verschiedene Punkte, so dass keine Gerade durch mehr als zwei von diesen Punkten geht.

Fano-Ebene



Dualität



Beobachtungen:

- Die Fano-Ebene (kleinste projektive Ebene) enthält gleich viele Punkte wie Geraden.
- Auf jeder Geraden liegen genau drei Punkte und durch jeden Punkt verlaufen genau drei Geraden.
- Es gibt vier Geraden, so dass keiner der Punkte auf mehr als zwei von diesen liegt.

$\Rightarrow$ Die Fano-Ebene ist *selbstdual*, d.h. $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ vertauschbar!

Dualität

Aus den Axiomen einer projektiven Ebene lässt sich allgemein folgern:

Theorem

Jede *projektive Ebene ist selbstdual.*

$\Rightarrow$ Jede(r) Aussage/Satz über Punkte und Gerade einer beliebigen, projektiven Ebene ist auch in seiner dualen Form (Vertauschen der Wörter *Punkte*/*Geraden* und *liegt auf*/*geht durch*) gültig.

Axiome der affinen Ebene (Wdh.)

Definition (Affine Ebene)

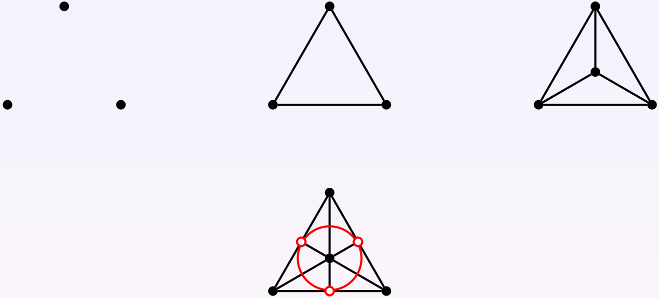
Eine *affine Ebene* ist eine Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, dreier Mengen $\mathcal{P}$ (der *Punkte*), $\mathcal{G}$ (der *Geraden*) und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ (der *Inzidenzen*).
Man sagt $p \in \mathcal{P}$ *liegt auf* $g \in \mathcal{G}$ (oder umgekehrt g *geht durch* p), genau dann, falls $(p, g) \in \mathcal{I}$ ist. Hierbei gilt:

(i) Für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ existiert genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, welche durch p und q geht.

(ii) Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$, welcher nicht auf g liegt, gibt es eine Gerade $h \in \mathcal{G}$, so dass p auf h liegt, aber kein Punkt auf g und h liegt. (Parallelenaxiom)

(iii) Es gibt drei verschiedene Punkte in $\mathcal{P}$, welche nicht alle auf einer Geraden aus $\mathcal{G}$ liegen. (Reichhaltigkeitsaxiom)

Beispielmodell



Beobachtung:

- Die (kleinste) affine Ebene lässt sich durch Hinzunahme einer *Ferngeraden* und entsprechender *Fernpunkte* zur (projektiven) Fano-Ebene ergänzen. (projektiver Abschluss)

Euklidische Ebene

Standardmodell für die (affine) euklidische Ebene ist (nach Descartes) das Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, mit:

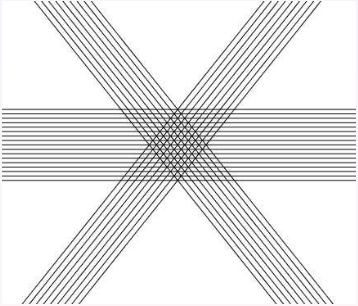
- $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{G} = \Big\{ \underbrace{\{(x,y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}}_{\text{Punktmenge/affiner Unterraum}} \;\Big|\; a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \vee b \neq 0 \Big\}$
- $\mathcal{I} = \Big\{ (p, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \;\Big|\; p \in g \Big\}$

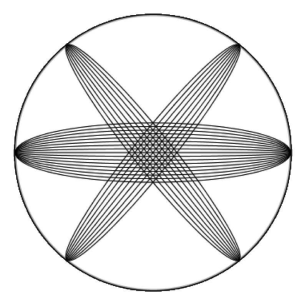
Gelten die entsprechenden Axiome?

- Zwischen zwei verschiedenen Punkten lässt sich eine Geradengleichung (eindeutig?) bestimmen.
- Reichhaltigkeit z.B. über $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$.
- Parallelenaxiom über Gerade gleicher Steigung durch vorgegebenen Punkt.

Projektive Einbettung

Lässt sich die euklidische Ebene durch Hinzunahme einer Ferngeraden und entsprechender Fernpunkte auch projektiv einbetten/abschließen?

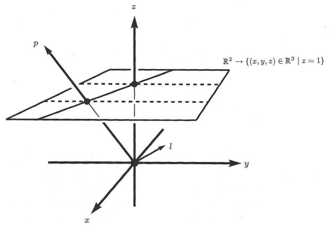




Projektive Einbettung

konstruktive(r) Idee/Ansatz:

Einbettung der euklidischen (affinen) Ebene in höherdimensionalen Raum.



Ein Punkt p wird über den “durchstoßenden” Ursprungsstrahl, d.h. über die Äquivalenzklasse $[p] := \big\{\lambda \cdot p \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}$ repräsentiert, wobei $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(0,0,0)^T\big\}$.

Hierbei erhalten wir (zusätzliche) *Fernpunkte* der Form $\big[(x,y,0)^T\big]$.

reelle, projektive Ebene

Definition ($\mathbb{R}\mathbf{P}^2$)

Die reelle, projektive Ebene $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ist das Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, mit:

- $\mathcal{P} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}}{\mathbb{R} \setminus \{0\}} := \left\{[v] \mid v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}\right\}$,
  wobei $[v] := \left\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$ (Äquivalenzklasse).
- $\mathcal{G} =?$
- $\mathcal{I} =?$

Gerade entspricht in der (affinen) euklidischen Ebene einer Punktemenge

$$\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}, \quad \text{wobei } a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0,$$

also in der (Standard-)Einbettung der Ebene $z = 1$, allen Punkten

$$\{(x, y, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + c \cdot 1 = 0\}, \quad \text{wobei } a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0.$$

reelle, projektive Ebene

Beobachtungen:

- Die Gerade

$$\{(x, y, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + c \cdot 1 = 0\}, \qquad a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0.$$

  lässt sich als Schnitt der Ebene $z = 1$ mit einer eindeutigen Ebene E, welche den Ursprung enthält, darstellen.

- Die (homogene) Koordinatenform dieser Ebene lautet (offenbar)

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad E : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

reelle, projektive Ebene

Beobachtungen:

- Die (homogene) Koordinatenform dieser Ebene lautet (offenbar)

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad E : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

- Liegt ein Repräsentant einer Äquivalenzklasse $[p] := \left\{ \lambda \cdot p \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ in E, so gilt dies auch für alle anderen.
- Da der Vektor $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ auch nur bis auf Vielfache eindeutig ist, liegt folgende Definition für $\mathcal{G}$ und $\mathcal{I}$ des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ nahe:

reelle, projektive Ebene

Definition ($\mathbb{R}\mathbf{P}^2$)

Die reelle, projektive Ebene $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ist das Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, mit:

- $\mathcal{P} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}}{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$
- $\mathcal{G} = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}}{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$
- $\mathcal{I} = \left\{ \big([p], [g]\big) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \;\middle|\; p \circ g = 0 \right\}$

Man beachte hierbei (wieder) die vollständige Dualität in der Definition bzgl. $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$!

Beispiel

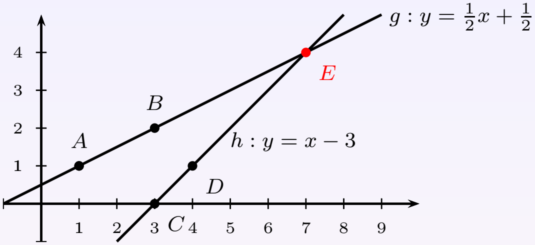
Gesucht ist die Gerade $[g] \in \mathcal{G}$ durch die beiden Punkte $A = [(1,1,1)]$ und $B = [(3,2,1)]$, sprich $A(1|1)$ und $B(3|2)$ (in der Standardeinbettung). Gemäß der Definition von $\mathcal{I}$ ist ein $[g] = \left[(a,b,c)^T\right] \in \mathcal{G}$ gesucht, mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad \begin{matrix} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{matrix}$$

Beobachtungen:

- Wahl der Repräsentanten von A und B im LGS egal.
- Da A und B unterschiedliche Äquivalenzklassen sind, besitzt dieses 3×2-LGS **allgmein** Lösungsraum der Dimension 1.
- $\mathbb{L} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \quad \Rightarrow \quad \overbrace{-1 \cdot x + 2 \cdot y - 1 \cdot z = 0}^{\text{bzw. } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

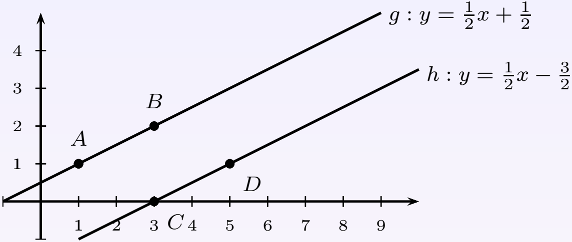
Beispiel



- $g =$ **join(A,B)** $:= \left[(3,2,1)^T \times (1,1,1)^T\right] = \left[(-1,2,-1)^T\right]$
- $h =$ **join(C,D)** $:= \left[(3,0,1)^T \times (4,1,1)^T\right] = \left[(-1,1,3)^T\right]$
- $E =$ **meet(g,h)** $:= \left[(-1,2,-1)^T \times (-1,1,3)^T\right] = \left[(7,4,1)^T\right]$

Was passiert, falls D auf $(5,1)$ bewegt wird?

Beispiel



- $g = \textbf{join(A,B)} := \left[(3, 2, 1)^T \times (1, 1, 1)^T\right] = \left[(-1, 2, -1)^T\right]$
- $h = \textbf{join(C,D)} := \left[(3, 0, 1)^T \times (5, 1, 1)^T\right] = \left[(-1, 2, 3)^T\right]$
- $E = \textbf{meet(g,h)} := ?\left[(-1, 2, -1)^T \times (-1, 2, 3)^T\right] = \left[(8, 4, 0)^T\right]$

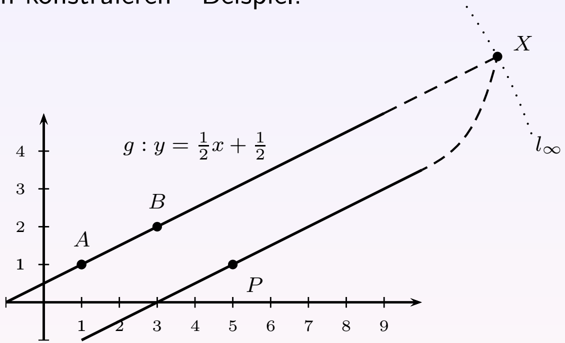
$\left[(8, 4, 0)^T\right]$ besitzt keinen Repräsentanten in der Ebene $z = 1$!
In diesem *Fernpunkt* treffen sich alle (parallele) Geraden der Richtung $(8, 4)$ bzw. $(2, 1)$.

Kurz und knapp

- In $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ sind die Elemente von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ Äquivalenzklassen der Form $[v] := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
- Ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, klärt das Skalarprodukt der Repräsentanten ($= 0?$) .
- Die Verbindungsgerade (**join**) zweier Punkte und den Schnitt (**meet**) zweier Geraden erhält man jeweils über das Kreuzprodukt der Repräsentanten.
- Punkt der Form $[(x, y, 0)^T]$ sind *Fernpunkte*.
- Die Gerade $[(0, 0, 1)^T]$ ist die (eindeutige) *Ferngerade*.

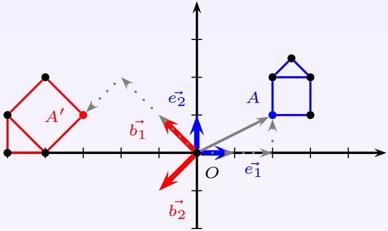
Bemerkung

Mittels **join** und **meet** lassen sich in $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ (einfach) weitere geometrische (Grund-)Operationen konstruieren - Beispiel:



$$\Rightarrow \textbf{parallel}(g, P) := \textbf{join}\big(\textbf{meet}(g, l_\infty), P\big)$$

Matrizenmultiplikationen & Transformationen



$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a'} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a'} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikationen & Transformationen

Basiswechsel/Transformation über Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{kurz: } M \odot x}$$

Bzw. für homogene Koordinaten des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$:

$$\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{3,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}\right] \odot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right] := [M \odot x]$$

Matrizenmultiplikationen & Transformationen

Bemerkungen bzgl. (quadratischer) Matrix M:

- Die Spalten von M entsprechen einer Gruppe von Basisvektoren.
- Damit die Zuordnung $x \mapsto y = M \odot x$ eineindeutig ist, müssen die Spaltenvektoren lineare unabhängig sein (Stichwort: Spatprodukt)!
- $\Rightarrow$ Jede Matrix mit linear unabhängigen Spalten kann als eineindeutiger Basiswechsel/Transformation angesehen werden. Man nennt solche Matrizen **invertierbar**.
- Zu jeder invertierbaren Matrix M existiert eine eindeutige (**inverse**) Matrix M^{-1}, welche die Umkehrabbildung/Transformation realisiert.

Fragestellungen im Kontekt des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$

1.) Ist die Abbildung

$$[x] \mapsto [y] = [M] \odot [x]$$

wohldefiniert (Stichwort: Äquivalenzklassen)?

2.) Welche geometrischen Eigenschaften bleiben unter einer solchen (allg.) Transformation, bei invertierbarer Matrix M, erhalten?

3.) Wie bestimmt man eine Transformation (Matrix M) durch vorgegebene $x_i \mapsto y_i$?

Fragestellungen im Kontekt des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$

zu 1.) Es ist nachzuweisen, dass das Ergebnis der Abbildung

$$[x] \mapsto [y] = [M] \odot [x]$$

unabhängig von der Wahl der konkreten Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[M]$ und $[x]$ ist.
Seien also $M_1, M_2 \in [M]$ und $x_1, x_2 \in [x]$ jeweils zwei beliebige (evtl. unterschiedliche) Repräsentanten, d.h. es existieren $\lambda, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass

$$M_1 = \lambda \cdot M_2 \qquad \text{und} \qquad x_1 = \tau \cdot x_2$$

Damit folgt

$$y_1 = M_1 \odot x_1 = (\lambda \cdot M_2) \odot (\tau \cdot x_2) = (\lambda \cdot \tau) \cdot M_2 \odot x_2 = \underbrace{(\lambda \cdot \tau)}_{\text{Faktor } \neq 0} \cdot y_2$$

also $[y_1] = [y_2]$.

zu 2.)

Theorem

Sei M eine invertierbare Matrix. Dann bildet die Transformation $[x] \mapsto [y] = [M] \odot [x]$, kollineare Punkte auf kollineare Punkte des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ab.

Beweis.

Seien $[a], [b], [c] \in \mathcal{P}$ kollinear, d.h. es gibt eine Gerade $[g] \in \mathcal{G}$, so dass gilt

$$a \circ g = 0, \qquad b \circ g = 0 \qquad \text{und} \qquad c \circ g = 0.$$

Seien $a' = M \odot a$, $b' = M \odot b$ und $c' = M \odot c$ Repräsentanten der (abgebildeten) Punkte $[a], [b]$ und $[c]$, und $g' := \left(M^{-1}\right)^T \odot g$. Damit folgt

$$\begin{aligned} a' \circ g' &= a' \circ \left(\left(M^{-1}\right)^T \odot g\right) = (M \odot a) \circ \left(\left(M^{-1}\right)^T \odot g\right) = \\ &= (M \odot a)^T \odot \left(\left(M^{-1}\right)^T \odot g\right) = a^T \odot M^T \odot \left(M^{-1}\right)^T \odot g = \\ &= a^T \odot \left(M^{-1} \odot M\right)^T \odot g = a^T \odot g = a \circ g = 0. \end{aligned}$$

Also liegt $[a']$ (analog $[b']$ und $[c']$) auf der **gemeinsamen** Geraden $[g']$. $\square$

Anmerkungen

- Der letzte Beweis war *konstruktiv*, d.h. neben der behaupteten Aussage, erhält man zusätzlich konstruktive Informationen, **d.h. hier**: Bildet man mit der Transformation $[x] \mapsto [y] = [M] \odot [x]$ Punkte des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ab, dann erhält man die entsprechenden Geraden über

$$[g] \mapsto \left[\left(M^{-1}\right)^T \odot g\right]$$

- Jede invertierbare Matrix M beschreibt eine Transformation des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ welche Kollinearität erhält - **hiervon gilt auch die Umkehrung!**

Theorem (Hauptsatz der projektiven Geometrie)

Ist $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine eineindeutige Abbildung, welche die Kollinearität von Punkten erhält, so lässt sich T über einer Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen.

Fragestellungen im Kontekt des $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$

zu 3.) Wie erhält man eine Transformation zu vorgegebenen Daten?

Theorem

Seien $[a]$, $[b]$, $[c]$ *und* $[d] \in \mathcal{P}$ *vier Punkte, von welchen jeweils keine drei kollinear sind und* $[a']$, $[b']$, $[c']$ *und* $[d'] \in \mathcal{P}$ *vier weitere (Bild-)Punkte mit dieser Eigenschaft.*
Dann gibt es eine invertierbare 3×3*-Matrix* M *so dass*

$$[M \odot a] = [a'] \quad [M \odot b] = [b'] \quad [M \odot c] = [c'] \quad \textit{und} \quad [M \odot d] = [d'].$$

Summa summarum: Eine (projektive) Transformation ist über vier Punkte(-pärchen) festgelegt.

Beweis.

Seien $a, b, c, d, a', b', c', d'$ Repräsentanten. Wir nehmen zunächst an, dass

$$a = (1,0,0)^T,\ b = (0,1,0)^T,\ c = (0,0,1)^T \text{ und } d = (1,1,1)^T.$$

Sei M eine Matrix, deren Spalten Vielfache von a', b' und c' sind, also

$$M := \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda \cdot a' & \mu \cdot b' & \tau \cdot c' \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Damit folgt (offenbar) $[M \odot a] = [a'], [M \odot b] = [b'], [M \odot c] = [c']$ und

$$M \odot d = \lambda \cdot a' + \mu \cdot b' + \tau \cdot c'$$

bzw. die Bedingung (das LGS) $\lambda \cdot a' + \mu \cdot b' + \tau \cdot c' = d'$. □

Beweis.

Da a', b' und c' nach Voraussetzung nicht kollinear sind, muss das LGS

$$\lambda \cdot a' + \mu \cdot b' + \tau \cdot c' = d'$$

eindeutig lösbar sein (was den Spezialfall beweist).
Seien nun a', b', c', d' (wieder) beliebig. Nach dem Bewiesenem existiert eine Matrix M_1, so dass $[M_1 \odot (1,0,0)^T] = [a]$, $[M_1 \odot (0,1,0)^T] = [b]$, $[M_1 \odot (0,0,1)^T] = [c]$, und $[M_1 \odot (1,1,1)^T] = [d]$.
Analog gibt es eine Matrix M_2, so dass $[M_2 \odot (1,0,0)^T] = [a']$, $[M_2 \odot (0,1,0)^T] = [b']$, $[M_2 \odot (0,0,1)^T] = [c']$, $[M_2 \odot (1,1,1)^T] = [d']$.
Dann ist $T := M_2 \odot M_1^{-1}$ die gesuchte Matrix. $\square$

Anmerkungen

Auch der letzte Beweis war konstruktiv, d.h. eine gewünschte (projektive) Transformationsmatrix T, welche $[a], [b], [c], [d]$ auf $[a'], [b'], [c'], [d']$ abbildet, erhält man über den (Rechen-)Weg

1. Matrizen M_1, M_2 (über zwei LGS) berechnen (vgl. oben).
2. Matrix M_1 invertieren.
3. $T = M_2 \odot M_{-1}$ berechnen (Matrizenmultiplikation).

Kurz und knapp

- Die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von $\mathcal{P}$ nach $\mathcal{P}$, welche (zumindest) Kollinearität erhalten, entspricht genau der Menge aller invertierbaren 3×3-Matrizen (bis auf Vielfache).
- Ein derartige Abbildung nennt man eine **projektive Transformation**.
- ... Zeit für Beispiel ;-)